# Onde e particelle

Esercizi svolti dal prof. Trivia Gianluigi

**Esercizio 1.** L'Universo è permeato da una radiazione elettromagnetica emessa nelle prime fasi della sua vita. Gli astronomi hanno misurato la distribuzione con grande precisione e hanno scoperto che è identica alla distribuzione di radiazione da parte di un corpo nero a temperatura $2,7K$. Calcolare la lunghezza d'onda alla quale si ha il massimo di emissione.

**Soluzione.** La grandezza richiesta è ottenibile ricordando la legge di Wien per la quale

$$\lambda_{max} T = 2,90 \cdot 10^{-3}\, m \cdot K$$

per cui

$$\lambda_{max} = \frac{2,90 \cdot 10^{-3}\, m \cdot K}{2,7\, K} = 1,07 \cdot 10^{-3}\, m$$

**Esercizio 2.** La superficie di Betelgeuse può essere considerata un corpo nero sferico di raggio $1,93 \cdot 10^{11}\, m$ e temperatura $3600\, K$. Calcolare l'energia irradiata da Betelgeuse in $1\, s$.

**Soluzione.** La superficie di una sfera è data da $4\pi r^2$, cioè

$$S = 4\pi \cdot \left(1,93 \cdot 10^{11}\, m\right)^2 = 4,68 \cdot 10^{23}\, m^2$$

$$E = S\sigma T^4 = 4,68 \cdot 10^{23}\, m^2 \times 5,67 \cdot 10^{-8}\, \frac{J}{s \cdot m^2 \cdot K^4} \times 3700^4\, K^4 \times 1\, s = 4,97 \cdot 10^{30}\, J$$

**Esercizio 3.** Una stazione radio AM trasmette un'onda elettromagnetica con frequenza $665\, kHz$, mentre una stazione radio FM trasmette a frequenza $93,1\, MHz$. Quanti fotoni AM servono per avere un' energia totale pari a quella del fotone FM?

**Soluzione.** L'energia di un fotone è data da $E = hf$, dove $h$ è la costante di Planck e $f$ la frequenza della radiazione. Avremo quindi

$$E_{AM} = 6,63 \cdot 10^{-34}\, J \cdot s \times 665 \cdot 10^3\, s^{-1} = 4,41 \cdot 10^{-28}\, J$$
$$E_{FM} = 6,63 \cdot 10^{-34}\, J \cdot s \times 93,1 \cdot 10^6\, s^{-1} = 6,17 \cdot 10^{-26}\, J$$

Pertanto

$$n_{fot} = \frac{6,17 \cdot 10^{-26}\, J}{4,41 \cdot 10^{-28}\, J} = 1,40 \cdot 10^2$$

**Esercizio 4.** Due sorgenti emettono onde elettromagnetiche. La sorgente B emette una lunghezza d'onda tripla rispetto alla sorgente A. Ogni fotone della sorgente A ha un'energia di $2,1 \cdot 10^{-18}\, J$. Calcolare l' energia di un fotone della sorgente B.

**Soluzione.** La relazione che associa energia e lunghezza d'onda di un fotone della sorgente A è

$$E_A = hf_A = h\frac{c}{\lambda_A}$$

per cui essendo la lunghezza d'onda della sorgente B tripla di quella di A, cioè $\lambda_B = 3\lambda_A$, avremo

$$E_B = h\frac{c}{3\lambda_A} = \frac{1}{3}h\frac{c}{\lambda_A} = \frac{E_A}{3} = \frac{2,1 \cdot 10^{-18}\, J}{3} = 7,0 \cdot 10^{-19}\, J$$

**Esercizio 5.** Una sorgente radio in FM trasmette a una frequenza di $98,1\,MHz$. La potenza irradiata dall'antenna è di $5,0 \cdot 10^4\,W$. Quanti fotoni al secondo emette l'antenna?

**Soluzione.** L'energia di un singolo fotone è

$$E = hf = 6,63 \cdot 10^{-34}\,J \cdot s \times 98,1 \cdot 10^6\,s^{-1} = 6,50 \cdot 10^{-26}\,J$$

La potenza è la quantità di energia irradiata in un secondo, per cui per avere il valore indicato servono

$$n = \frac{5,0 \cdot 10^4\,\frac{J}{s}}{6,50 \cdot 10^{-26}\,J} = 7,7 \cdot 10^{29}\ fotoni$$

**Esercizio 6.** La luce ultravioletta è responsabile dell'abbronzatura. Determinare la lunghezza d'onda (in $nm$) di un fotone ultravioletto di energia $6,4 \cdot 10^{-19}\,J$.

L'energia di una radiazione è legata alla lunghezza d'onda dalla relazione

$$E = h\frac{c}{\lambda}$$

per cui

$$\lambda = \frac{hc}{E} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34}\,J \cdot s \times 3,0 \cdot 10^8\,\frac{m}{s}}{6,4 \cdot 10^{-19}\,J} = 3,1 \cdot 10^{-7}\,m = 310\,nm$$

**Esercizio 7.** Una radiazione di una determinata lunghezza d'onda provoca l'emissione di elettroni con un'energia cinetica massima di $0,68\,eV$ da un metallo il cui lavoro di estrazione è pari a $2,75\,eV$. Calcola la massima energia cinetica (in eV) dei foto-elettroni emessi da un metallo il cui lavoro di estrazione è $2,17eV$ quando è illuminato con la stessa radiazione.

**Soluzione.** Ricordiamo la relazione che descrive l'effetto fotoelettrico

$$hf = h\frac{c}{\lambda} = K_{max} + W_0$$

dove $W_0$ è proprio il lavoro di estrazione. Il primo membro è uguale in entrambi i casi (stessa radiazione incidente), per cui al diminuire del lavoro di estrazione avremo un corrispondente aumento dell'energia cinetica dell'elettrone emesso.

$$0,68\,eV + 2,75\,eV = K_{max} + 2,17\,eV$$

da cui

$$K_{max} = 1,26\,eV$$

**Esercizio 8.** Il filamento di una lampada alogena irradia la maggior quantità di energia a una frequenza di $3,4 \cdot 10^{14}\,Hz$. Supponi che si comporti come un corpo nero. Calcola la sua temperatura.

**Soluzione.** Il massimo dell'energia emessa corrisponde a una lunghezza d'onda massima espressa dalla legge di Wien
$$\lambda_{max}T = 2,90 \cdot 10^{-3}\, m \cdot K$$
Otteniamo la lunghezza dalla frequenza
$$\lambda_{max} = \frac{c}{f} = \frac{3,0 \cdot 10^{8}\, \frac{m}{s}}{3,4 \cdot 10^{14}\, s^{-1}} = 0,88 \cdot 10^{-6}\, m$$
da cui
$$T = \frac{2,90 \cdot 10^{-3}\, m \cdot K}{0,88 \cdot 10^{-6}\, m} = 3,3 \cdot 10^{3}\, K$$

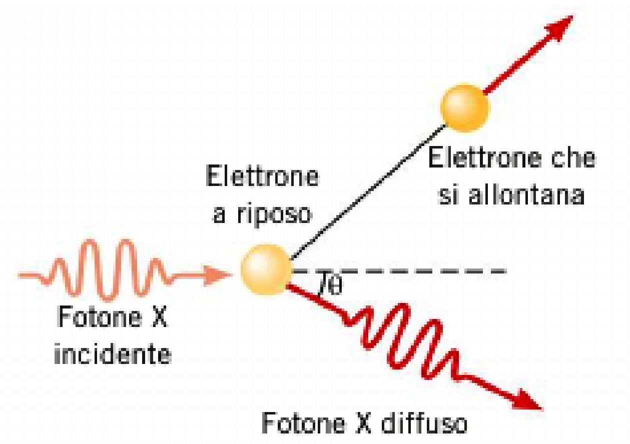
**Esercizio 9.** La massima lunghezza d'onda con cui un'onda elettromagnetica può emettere elettroni da una determinata superficie metallica è di $485\, nm$. Calcolare il lavoro di estrazione $W_0$ del metallo in elettronvolt.

**Soluzione.** Applichiamo sempre la relazione dell'effetto fotoelettrico secondo la quale
$$h\frac{c}{\lambda_{max}} = K_{max} + W_0$$
Se il fotone emesse non ha energia cinetica, allora
$$\frac{6,63 \cdot 10^{-34}\, J \cdot s \times 3,0 \cdot 10^{8}\, \frac{m}{s}}{485 \cdot 10^{-9}\, m} = W_0 = 4,1 \times 10^{-19}\, J$$
ma utilizzando il fattore di conversione da J a eV, $1,60 \cdot 10^{-19}\, J = 1\, eV$, si ha
$$W_0 = \frac{4,1 \times 10^{-19}\, J}{1,60 \cdot 10^{-19}\, \frac{J}{eV}} = 2,56\, eV$$

**Esercizio 10.** Un protone si trova a $0,420\, m$ da una carica puntiforme di $18,30\, \mu C$. La forza elettrica repulsiva fa muovere il protone fino a una distanza di $1,58\, m$ dalla carica. Supponiamo che l'energia potenziale elettrostatica persa dal sistema venga acquisita da un fotone che viene emesso durante il processo. Quanto vale la sua lunghezza d'onda?

**Soluzione.** L'energia potenziale è espressa da
$$\Delta U = k_0 q_{pro} q \left(\tfrac{1}{r_1} - \tfrac{1}{r_2}\right) =$$
$$= 8,99 \cdot 10^{9}\, Nm^2C^{-2} \times \left(1,60 \cdot 10^{-19} \times 18,30 \cdot 10^{-6}\right) C^2 \left(\frac{1}{0,420} - \frac{1}{1,58}\right) m^{-1} = 4,60 \cdot 10^{-14}\, J$$
Sappiamo che $E_{fotone} = h\frac{c}{\lambda}$, per cui
$$\lambda = \frac{hc}{E} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34}\, J \cdot s \times 3 \cdot 10^{8}\, \frac{m}{s}}{4,60 \cdot 10^{-14}\, J} = 4,32 \cdot 10^{-12}\, m$$

**Esercizio 11.** Un fascio di raggi X con lunghezza d'onda $0,3120\, nm$ è diffuso dagli elettroni liberi della grafite. L'angolo di diffusione della figura è $\theta = 135,0°$. Calcola il modulo della quantità di moto del fotone incidente e del fotone diffuso.




**Soluzione.** Calcoliamo il modulo della quantità di moto del fotone incidente

$$p_{in} = \frac{h}{\lambda} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34}\, J \cdot s}{0,3120 \cdot 10^{-9}\, m} = 2,13 \cdot 10^{-24}\, kg \frac{m}{s}$$

$$p'_{dif} = \frac{h}{\lambda'} = \frac{h}{\lambda + \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta)} = 2,09 \cdot 10^{-24}\, kg \frac{m}{s}$$

**Esercizio 12.** Un fotone X incidente di lunghezza d'onda 0, 2750 nm collide con un elettrone inizialmente fermo. Il fotone è diffuso a un angolo $\theta = 180,0°$ con una lunghezza d'onda di 0, 2825 nm. Applicando il principio di conservazione della quantità di moto, calcolare la quantità di moto acquisita dall'elettrone.

**Soluzione.** Il fotone praticamente è riflesso all'indietro. Il fotone ritorna indietro lungo la stessa direzione del fotone incidente, ma con verso opposto, per cui il suo momento sarà di segno opposto.

Applicando il principio di conservazione della quantità di moto si avrà

$$p_{in}^{f} = -p_{dif}^{f} + p_{elettrone}$$

Ricordando la formula di De Broglie che introduce anche per un fotone una quantità di moto e applicandola alla relazione che descrive l'effetto Compton, la differenza della quantità di moto tra i due fotoni, incidente e diffuso

$$p_{in} + p_{dif} = p_{elet} = \frac{h}{\lambda} + \frac{h}{\lambda'} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34}\, J \cdot s}{0,2750 \cdot 10^{-9}} + \frac{6,63 \cdot 10^{-34}\, J \cdot s}{0,2850 \cdot 10^{-9}} = 4,75 \cdot 10^{-24}\, kg\, \frac{m}{s}$$

Se la quantità di moto si conserva allora questo valore corrisponde alla quantità di moto acquisita dall'elettrone.

**Esercizio 13.** Il fotone X rivelato a un angolo di diffusione $\theta = 163°$ ha una lunghezza d'onda di $0,1867\, nm$. Determinare: a) la lunghezza d'onda del fotone incidente; b) l'energia del fotone incidente; c) l'energia del fotone diffuso; d) l'energia cinetica dell'elettrone.

**Soluzione.** a) troviamo la lunghezza d'onda del fotone incidente su un elettrone

$$\lambda = \lambda' - \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta) = 1,867 \cdot 10^{-10}\, m - 2,426 \cdot 10^{-12}\, m\, (1 - \cos 163°) = 1,819 \cdot 10^{-10}\, m$$

b) il fotone incidente ha un'energia

$$E = hf = h\frac{c}{\lambda} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34}\,J \cdot s \times 2,998 \cdot 10^{8}\,\frac{m}{s}}{1,819 \cdot 10^{-10}\,m} = 1,092 \cdot 10^{-15}\,J$$

c) l'energia del fotone diffuso

$$E = hf = h\frac{c}{\lambda'} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34}\,J \cdot s \times 2,998 \cdot 10^{8}\,\frac{m}{s}}{1,867 \cdot 10^{-10}\,m} = 1,064 \cdot 10^{-15}\,J$$

d) l'energia cinetica del fotone per il principio di conservazione dell'energia è

$$E_{el} = (1,092 - 1,064) \cdot 10^{-15} = 2,8 \cdot 10^{-17}\,J$$

**Esercizio 14.** Qual è la massima variazione di lunghezza d'onda che un fotone subisce per diffusione Compton da una molecola di azoto ($N_2$)?

**Soluzione.** la relazione dell'effetto Compton subirà una modifica relativa alla massa del bersaglio, che non è più un elettrone ma un'intera molecola la cui massa è $4,653 \cdot 10^{-26}\,kg$

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_{N_2}c}(1 - \cos\alpha)$$

la quantità variabile è pertanto l'angolo di diffusione e il valore $1 - \cos\alpha$ è massimo per $\alpha = 180°$ perché $= 2$, per cui

$$\Delta\lambda = \frac{2 \times 6,63 \cdot 10^{-34}\,J \cdot s}{4,653 \cdot 10^{-26}\,kg \times 3,0 \cdot 10^{8}\,\frac{m}{s}} = 9,50 \cdot 10^{-17}\,m$$

**Esercizio 15.** Nell'effetto Compton si applica la conservazione della quantità di moto per cui la quantità di moto totale del fotone e dell'elettrone è la stessa prima e dopo la diffusione. Supponiamo che il fotone incidente, avente una lunghezza d'onda di $9,00 \cdot 10^{-12}\,m$, si muova nella direzione $+x$ e che il fotone diffuso emerga con un angolo $\theta = 90°$ nella direzione $-y$. Trovare le componenti $x$ e $y$ della quantità di moto dell'elettrone diffuso.

**Soluzione.** il fotone diffuso ha una lunghezza d'onda

$$\lambda' = \lambda + \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta) = 9,00 \cdot 10^{-12} + 2,43 \cdot 10^{-12}(1 - 0) = 1,14 \cdot 10^{-11}\,m$$

il principio di conservazione della quantità di moto si esprime in questo caso come

$$p_{inc}^{fot} = p_{dif}^{fot} + p^{el}$$

In termini vettoriali

$$\begin{array}{ll} p_x^i = p_x^d + p_x^{el} & p_x^{el} = p_x' = \frac{h}{\lambda} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34}\,J \cdot s}{9,00 \cdot 10^{-12}\,m} = 7,37 \cdot 10^{-23}\,\frac{kg\,m}{s} \\ p_y^i = -p_y^d + p_y^{el} & p_y^{el} = p_y^d = \frac{h}{\lambda'} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34}\,J \cdot s}{1,14 \cdot 10^{-11}\,m} = 5,82 \cdot 10^{-23}\,\frac{kg\,m}{s} \end{array}$$

**Esercizio 16.** La particella A è ferma e la particella B si scontra frontalmente con essa. La collisione è completamente anelastica per cui le due particelle rimangono attaccate dopo la collisione e procedono insieme con la stessa velocità. Le masse delle due particelle sono diverse e non ci sono forze esterne che agiscono su di loro. La lunghezza d'onda di de Broglie della particella B prima della collisione è $2,0 \cdot 10^{-34}\,m$. Trovare la lunghezza d' onda di de Broglie dell'oggetto che si è formato dopo la collisione.

**Soluzione 17.** Applicando il principio di conservazione della quantità di moto si ha

$$m_A v_A^i + m_B v_B^i = (m_A + m_B)\, v_{AB}^f$$

dove $v_{1A}^i = 0$, per cui

$$(m_A + m_B)\, v_{AB}^f = m_B v_B^i$$

cioè

$$p_{AB}^f = p_B^i$$

Se la particelle B ha la lunghezza d'onda di de Broglie indicata, allora

$$p_B^i = m_B v_B^i = \frac{h}{\lambda_B} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34}\,J \cdot s}{2,0 \cdot 10^{-34}\,m}\,kg\frac{m}{s} = 3,32\,kg\frac{m}{s} = p_{AB}^f$$

e la lunghezza d'onda di questo "oggetto" è

$$\lambda_{AB} = 2,0 \cdot 10^{-34}\,m$$

**Esercizio 18.** Un fotone di lunghezza d'onda $0,45000\,nm$ colpisce un elettrone libero inizialmente fermo. Il fotone viene spinto indietro. Qual è la velocità di rinculo dell'elettrone dopo la collisione?

**Soluzione.** Il fotone incidente ha un quantità di moto

$$p^i = \frac{h}{\lambda} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34}\,J \cdot s}{4,5 \cdot 10^{-10}\,m} = 1,47 \cdot 10^{-24}\,kg\frac{m}{s}$$

se il fotone diffonde nella stessa direzione di quello incidente ma con verso opposto, cioè con un angolo $\theta = 180°$, allora $1 - \cos\theta = 2$ e quindi la quantità di moto dell'elettrone sarà il doppio di quella del fotone incidente

$$p^{el} = 2,94 \cdot 10^{-24}\,kg\frac{m}{s}$$

la massa dell'elettrone è uguale a $9,11 \cdot 10^{-31}\,kg$ e la sua velocità

$$v_e = \frac{p^{el}}{m_e} = \frac{2,94 \cdot 10^{-24}\,kg\frac{m}{s}}{9,11 \cdot 10^{-31}\,kg} = 3,22 \cdot 10^6\,\frac{m}{s} \cong \frac{c}{100}$$

**Esercizio 19.** Un fotone di un raggio X viene diffuso a un angolo $\theta = 180,0°$ da un elettrone inizialmente fermo. Dopo la diffusione, l'elettrone ha una velocità di $4,67 \cdot 10^6\,\mathrm{m/s}$. Determinare la lunghezza d' onda del fotone incidente.

**Soluzione.** Il fotone diffuso ritorna nella direzione di partenza con verso opposto, cioè la sua componente lungo l'asse $x$ è negativa, per cui

$$p_f^i = -p_f^d + p^{el} \quad p^{el} = 2p_f^i$$

L'elettrone ha una quantità di moto

$$p^{el} = 9,11 \cdot 10^{-31}\, kg \times 4,67 \cdot 10^6\, \frac{m}{s} = 4,25 \cdot 10^{-24}\, kg\frac{m}{s}$$

la quantità di moto del fotone incidente è quindi la metà di $p^{el}$, cioè

$$p_f^i = \frac{h}{\lambda} = 2,13 \cdot 10^{-24}\, kg\frac{m}{s}$$

segue che

$$\lambda = \frac{h}{p_f^i} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34}\, J \cdot s}{2,13 \cdot 10^{-24}\, kg\frac{m}{s}} = 3,11 \cdot 10^{-10}\, m$$

**Esercizio 20.** Un fotone ha la stessa quantità di moto di un elettrone in movimento a una velocità di $2,0 \cdot 10^5 m/s$. Calcola la lunghezza d'onda del fotone.

**Soluzione.** La quantità di moto dell'elettrone è

$$p = mv = 9,11 \cdot 10^{-31}\, kg \times 2,0 \cdot 10^5\, \frac{m}{s} = 1,8 \cdot 10^{-25}\, kg\frac{m}{s}$$

la sua lunghezza d'onda sarà

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34}\, J \cdot s}{1,8 \cdot 10^{-25}\, kg\frac{m}{s}} = 3,7 \cdot 10^{-9}\, m$$

**Esercizio 21.** A quale velocità deve muoversi un protone per avere la stessa lunghezza d'onda di de Broglie di un elettrone in moto con una velocità di $4,50 \cdot 10^6\, \frac{m}{s}$?

**Soluzione.** La lunghezza d'onda di un protone è data da

$$\lambda_p = \frac{h}{p_p} = \frac{h}{m_p v_p}$$

la lunghezza d'onda di un elettrone è data da

$$\lambda_e = \frac{h}{p_e} = \frac{h}{m_e v_e}$$

se le due lunghezze d'onda devono essere uguali allora

$$\frac{h}{m_p v_p} = \frac{h}{m_e v_e}$$

cioè

$$m_p v_p = m_e v_e$$

per cui

$$v_p = \frac{m_e}{m_p} v_e = \frac{9,11 \cdot 10^{-31}\, kg}{1,67 \cdot 10^{-27}\, kg} \times 4,50 \cdot 10^6\, \frac{m}{s} = 2,45 \cdot 10^3\, \frac{m}{s}$$

**Esercizio 22.** In un esperimento di Young con doppia fenditura, con l'utilizzo di elettroni al posto della luce, l'angolo che definisce le frange luminose del primo ordine è $\alpha_A = 1,6 \cdot 10^{-4}$ gradi quando la quantità di moto dell'elettrone vale $p_A = 1,2 \cdot 10^{-22}\, kg\frac{m}{s}$. Usando la stessa doppia fenditura, quale dovrebbe essere la quantità di moto $p_B$ affinché l'angolo che definisce le frange luminose del primo ordine sia $\alpha_B = 4,0 \cdot 10^{-4}$ gradi?

**Soluzione.** l'esperimento di Young delle doppia fenditura è descritto dalla formula (per le frange del primo ordine $k = 1$)

$$\sin\alpha_A = \frac{\lambda_A}{d}$$

dove $d$ è la distanza tra i punti medi delle due fenditure. Ma $\lambda_A = \frac{h}{p_A}$ e $\lambda_B = \frac{h}{p_B}$ e riscrivendo la formula sopra in funzione di $d$, grandezza che rimane costante, si ha

$$d = \frac{h}{p_A \sin\alpha_A} = \frac{h}{p_B \sin\alpha_B}$$

avremo quindi che

$$p_B = p_A \frac{\sin\alpha_A}{\sin\alpha_B} = 1,2 \cdot 10^{-22} \times \frac{\sin\left(1,6 \cdot 10^{-4}\right)}{\sin\left(4,0 \cdot 10^{-4}\right)} = 4,8 \cdot 10^{-23}\, kg\frac{m}{s}$$

**Esercizio 23.** Una particella ha una lunghezza d'onda di de Broglie di $3,6 \cdot 10^{-10}\, m$. Se la sua energia cinetica raddoppia, qual è la nuova lunghezza d'onda di de Broglie assumendo che gli effetti relativistici possano essere trascurati?

**Soluzione.** L'energia cinetica di una particella è espressa da

$$K = \frac{p^2}{2m}$$

dove $p = \frac{h}{\lambda}$. L'energia cinetica iniziale sarà quindi

$$K_i = \frac{p_i^2}{2m}$$

se quella finale è doppia, allora, rimanendo la massa costante, si avrà sarà

$$p_f^2 = 2p_i^2$$

da cui

$$\left(\frac{h}{\lambda_f}\right)^2 = 2\left(\frac{h}{\lambda_i}\right)^2$$

dividendo per $h^2$ e risolvendo rispetto a $\lambda_f$ si ha

$$\lambda_f = \frac{\lambda_i}{\sqrt{2}} = \frac{3,6 \cdot 10^{-10}\, m}{\sqrt{2}} = 2,54 \cdot 10^{-10}\, m$$

**Esercizio 24.** L'energia cinetica di una particella è uguale all'energia di un fotone. La particella si muove al $5,0\%$ della velocità della luce. Determinare il rapporto tra la lunghezza d'onda del fotone e la lunghezza d'onda di de Broglie della particella.

**Soluzione.** L'energia cinetica della particella è uguale all'energia del fotone, ne segue

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{hc}{\lambda_{fot}}$$

ma $v = 0,05c$, per cui

$$\frac{1}{2}m\left(0,05\right)^2 c^2 = \frac{hc}{\lambda_{fot}}$$

da cui

$$\lambda_{fot} = \frac{2h}{m\left(0,05\right)^2 c}$$

ora la lunghezza d'onda di de Broglie della particella è

$$\lambda_p = \frac{p}{h} = \frac{mv}{h} = \frac{0,05mc}{h}$$

facendo il rapporto si ha

$$\frac{\lambda_{fot}}{\lambda_p} = \frac{2h}{m\left(0,05\right)^2 c} \cdot \frac{h}{0,05mc} = \frac{2}{0,05} = 40$$

**Esercizio 25.** L'energia di dissociazione di una molecola è l'energia necessaria per separare la molecola nei singoli atomi. L'energia di dissociazione per la molecola di cianogeno è $1,22 \cdot 10^{-18}\,J$. Supponiamo che tale energia venga fornita da un singolo fotone. Determinare la lunghezza d'onda del fotone e la sua frequenza. A quale regione dello spettro elettromagnetico appartiene il fotone?

**Soluzione.** Il fotone ha un'energia uguale a

$$E = \frac{hc}{\lambda} = 1,22 \cdot 10^{-18}\,J$$

e quindi una lunghezza d'onda

$$\lambda = \frac{hc}{E} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34}\,J\,s \times 3,0 \cdot 10^{-8}\,\frac{m}{s}}{1,22 \cdot 10^{-18}\,J} = 1,63 \cdot 10^{-7}\,m = 163\,nm$$

la frequenza è

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3,0 \cdot 10^{8}\,\frac{m}{s}}{1,63 \cdot 10^{-7}\,m} = 1,84 \cdot 10^{15}\,Hz$$

tale radiazione appartiene alla zona ultravioletta dello spettro elettromagnetico.

**Esercizio 26.** Una particella ha una velocità di $1,2 \cdot 10^6\,{}^{m}/_{s}$. La sua lunghezza d'onda di de Broglie è $8,4 \cdot 10^{-14}\,m$. Calcolare la massa della particella.

**Soluzione.** Sappiamo che

$$p = mv = \tfrac{h}{\lambda}$$

per cui

$$m = \frac{h}{\lambda v} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34}\,J\,s}{8,4 \cdot 10^{-14}\,m \times 1,2 \cdot 10^{6}\,\frac{m}{s}} = 6,6 \cdot 10^{-27} kg$$

**Esercizio 27.** Calcolare la lunghezza d'onda di un fotone da $5,0\,eV$ e la lunghezza d'onda di de Broglie di un elettrone da $5,0\,eV$.

**Soluzione.** Ricordiamo che l'unità di misura indicata con $eV$ (elettronvolt) è la più utilizzata per esprimere l'energia di una particella atomica o subatomica. Il fattore di trasformazione da $eV$ a Joule è

$$1\,eV = 1,602 \cdot 10^{-19}\,J$$

Nel primo caso il fotone avrà una lunghezza d'onda

$$E = \frac{hc}{\lambda}$$

$$\lambda = \frac{6,63 \cdot 10^{-34}\,J\,s \times 3,0 \cdot 10^{8}\,\frac{m}{s}}{5,0 \times 1,602 \cdot 10^{-19}\,J} = 2,5 \cdot 10^{-7}\,m$$

nel caso dell'elettrone, la cui massa è nota

$$\frac{p^2}{2m} = 5,0 \times 1,602 \cdot 10^{-19}\,J$$

$$\frac{h^2}{2m\lambda^2} = 8,01 \cdot 10^{-19}\,J$$

$$\lambda = h\sqrt{\frac{1}{2 \times 9,11 \cdot 10^{-31}\,kg \times 8,01 \cdot 10^{-19}\,J}} = 5,5 \cdot 10^{-10}\,m$$

**Esercizio 28.** Trovare la lunghezza d'onda di de Broglie di un elettrone con una velocità di $0,88\,c$, tenendo conto degli effetti relativistici.

**Soluzione.** La lunghezza d'onda di de Broglie è data da

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

se si tiene conto degli effetti relativistici

$$\lambda = \frac{h}{\frac{mv}{\sqrt{1-\beta^2}}} = \frac{h\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{mv} = \frac{\frac{h}{c}\sqrt{1-\frac{0,88^2c^2}{c^2}}}{0,88mc} = \frac{h\sqrt{1-0,88^2}}{0,88 \times 9,11 \cdot 10^{-31} \times 3,0 \cdot 10^{8}} = 1,31 \cdot 10^{-12}$$

**Esercizio 29.** Il Sole ha una temperatura superficiale maggiore del 61% a quella di Betelgeuse, che però ha un raggio 277 volte maggiore. Le superfici di entrambe si comportano come un corpo nero. Calcolare il rapporto tra la potenza emessa dal Sole e quella emessa da Betelgeuse.

**Soluzione.** La potenza emessa da un corpo nero in funzione della sua temperatura è data da

$$P = \frac{S\sigma T^4}{\Delta t}$$

dove $S$ è la superficie (sferica in questo caso) e $\sigma$ la costante di Stefan-Boltzmann. Avremo quindi

$$\frac{P_S}{P_B} = \frac{S_S\cancel{\sigma}T_S^4}{S_B\cancel{\sigma}T_B^4} = \frac{\cancel{4\pi}r_S^2T_S^4}{\cancel{4\pi}r_B^2T_B^4} = \left(\frac{r_s}{r_B}\right)^2 \cdot \left(\frac{T_s}{T_B}\right)^4$$

ma il raggio di Betelgeuse è 277 volte maggiore di quello del Sole e la temperatura superficiale del Sole è il 61% superiore a quella di Betelgeuse.

$$\left(\frac{r_s}{r_B}\right)^2 \cdot \left(\frac{T_s}{T_B}\right)^4 = \left(\frac{r_s}{277 r_S}\right)^2 \cdot \left(\frac{1,61 T_B}{T_B}\right)^4 = \frac{1,61^4}{277^2} = 8,9 \cdot 10^{-5}$$

**Esercizio 30.** Un fascio di luce incide su una superficie di sodio, il cui lavoro di estrazione vale $2,3\, eV$. La massima velocità dei fotoelettroni emessi è di $1,2 \cdot 10^6\, \frac{m}{s}$. Calcolare la lunghezza d'onda della luce incidente.

**Soluzione.** La legge di conservazione dell'energia si esprime come

$$hf = K_{max} + W$$

l'energia cinetica è uguale a $\frac{1}{2} m_e v_{max}^2$ e calcolata dà

$$K_{max} = \frac{1}{2} \times 9,11 \cdot 10^{-31}\, kg \times \left(1,2 \cdot 10^6\right)^2 = 6,6 \cdot 10^{-19}\, J$$

trasformiamo in joule anche il lavoro di estrazione

$$W = 2,3 \times 1,60 \cdot 10^{-19} = 3,7 \cdot 10^{-19}\, J$$

pertanto

$$\frac{hc}{\lambda} = 1,02 \cdot 10^{-18}\, J$$

da cui

$$\lambda = \frac{6,63 \cdot 10^{-34}\, J\, s \times 3,0 \cdot 10^8\, \frac{m}{s}}{1,02 \cdot 10^{-18}\, J} = 1,9 \cdot 10^{-9}\, m$$

**Esercizio 31.** Un elettrone viene accelerato a partire da fermo attraverso una differenza di potenziale di $418\, V$. Calcolare la sua lunghezza d'onda di de Broglie finale, tenendo conto che la sua velocità finale è molto inferiore alla velocità della luce.

**Soluzione.** Se la sua velocità finale è molto inferiore a quella della luce, è possibile trascurare ogni effetto relativistico. L'energia potenziale dell'elettrone è data da

$$\Delta U = e\Delta V = 1,602 \cdot 10^{-19}\, C \times 418\, V = 6,70 \cdot 10^{-17}\, J$$

Se tutta l'energia potenziale si trasforma in energia cinetica, si ha

$$\Delta U = \Delta K = \frac{1}{2} m \left(v_f^2 - v_i^2\right) = \frac{p^2}{2m}$$

$$p = \sqrt{2m\Delta U} = \sqrt{2 \times 9,11 \cdot 10^{-31} \times 6,70 \cdot 10^{-17}} = 1,10 \cdot 10^{-23}\, kg \frac{m}{s}$$

per cui

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34}\, J\, s}{1,10 \cdot 10^{-23}\, kg \frac{m}{s}} = 6,01 \cdot 10^{-11}\, m$$

**Esercizio 32.** L'energia cinetica media di un atomo di un gas perfetto monoatomico è

$$E = \frac{3}{2}kT$$

$k = 1,38 \cdot 10^{-23}\,\frac{J}{K}$ (costante di Boltzmann) e $T$ è la temperatura del gas in kelvin. Determinare la lunghezza d'onda di de Broglie di un atomo di elio (massa $m = 6,65 \cdot 10^{-27}\,kg$) che possiede l'energia cinetica media a temperatura ambiente ($293\,K$).

**Soluzione.** L'energia cinetica media dell'atomo di elio è

$$E = \frac{p^2}{2m} = \frac{3}{2} \times 1,38 \cdot 10^{-23}\,\frac{J}{K} \times 293\,K = 6,07 \cdot 10^{-21}\,J$$

la quantità di moto è quindi

$$p = \sqrt{2mE} = \sqrt{2 \times 6,65 \cdot 10^{-27}\,kg \times 6,07 \cdot 10^{-21}\,J} = 8,98 \cdot 10^{-24}\,kg\frac{m}{s}$$

e la lunghezza d'onda

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34}\,J\,s}{8,98 \cdot 10^{-24}\,kg\frac{m}{s}} = 7,38 \cdot 10^{-11}\,m$$

**Esercizio 33.** In una lastra metallica è stato praticato un foro avente raggio $1,2 \cdot 10^{-7}\,m$. Un fascio di elettroni aventi energia $120\,eV$ incide sulla lastra in direzione perpendicolare. Calcolare la larghezza dello spot prodotto su uno schermo posto a $1,4\,m$ dalla lastra dagli elettroni.

L'onda (di de Broglie) associata agli elettroni oltrepassa il foro subisce una diffrazione, formando uno spot su uno schermo determinato dal diametro del foro, $D$, e dalla distanza, $L$, dallo schermo che ha un diametro

$$d = 1,22L\frac{\lambda}{D}$$

Se gli elettroni hanno l'energia assegnata, la loro quantità di moto è

$$p = \sqrt{2m_eE} = \sqrt{2 \times 9,11 \cdot 10^{-31}\,kg \times 120\,eV \times 1,602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J/eV}} = 5,9 \cdot 10^{-24}\,kg\frac{m}{s}$$

per cui sapendo che $\lambda = \frac{h}{p}$ e $L = 1,4\,m$ si avrà

$$\lambda = \frac{6,63 \cdot 10^{-34}\,J\,s}{5,9 \cdot 10^{-24}\,kg\frac{m}{s}} = 1,12 \cdot 10^{-10}\,m$$

$$d = 1,22L\frac{\lambda}{D} = 1,22 \times 1,4\mathrm{m} \times \frac{1,12 \cdot 10^{-10}\,m}{2,4 \cdot 10^{-7}\,m} = 8,0 \cdot 10^{-4}\,m$$

**Esercizio 34.** Si vuole sciogliere un blocco di ghiaccio di $2,0\,kg$ a $0^\circ\,C$, convertendolo in acqua a $0^\circ\,C$. Trovare il numero di fotoni ( $\lambda = 620\,nm$) che devono essere assorbiti.

**Soluzione.** La quantità di calore necessaria per convertire la massa di ghiaccio in acqua è data da

$$q = 6,02\,\frac{kJ}{mole} \times \frac{2000\,g}{18,02\,\frac{g}{mole}} = 6,68 \cdot 10^5\,J$$

dove $18,02$ è il peso molecolare dell'acqua e il calore molare di fusione dell'acqua

L'energia trasportata dal fotone è

$$E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34}\,J\,s \times 3,0 \cdot 10^8\,\frac{m}{s}}{620 \cdot 10^{-9}\,m} = 3,2 \cdot 10^{-19}\,J$$

Il numero di fotoni dovrà pertanto essere

$$n = \frac{6,68 \cdot 10^5\,J}{3,2 \cdot 10^{-19}\,J} = 2,1 \cdot 10^{24}\,J$$

**Esercizio 35.** Un raggio di luce visibile ha una lunghezza d'onda di $\lambda = 395\,nm$ e colpisce perpendicolarmente una determinata superficie. L'intensità del fascio è tale che $3,0 \cdot 10^{18}$ fotoni colpiscono la superficie ogni secondo. Calcolare la forza media applicata dal fascio sulla superficie quando la superficie è nera e quando è riflettente.

**Soluzione.** Ogni fotone ha una quantità di moto

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34}\,J\,s}{395 \cdot 10^{-9}\,m} = 1,7 \cdot 10^{-27}\,kg\,\frac{m}{s}$$

Sulla superficie nera, cioè quando l'energia trasportata è completamente assorbita, ogni secondo avremo quindi una quantità di moto totale

$$p_{tot} = 1,7 \cdot 10^{-27} \cdot 3,0 \cdot 10^{18} = 5,0 \cdot 10^{-9}\,kg\,\frac{m}{s}$$

la seconda legge di Newton si può scrivere come

$$\overline{F} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{5,0 \cdot 10^{-9}\,kg\,\frac{m}{s}}{1\,s} = 5,0 \cdot 10^{-9}\,N$$

se la superficie è riflettente la conservazione della quantità di moto sarebbe

$$p_{iniziale} = p_{incidente} - p_{riflesso}$$

per cui $p_{incidente} = 2p_{iniziale}$ e la forza sarà quindi doppia, cioè $1,0 \cdot 10^{-8}\,N$.

**Esercizio 36.** Il nucleo dell'atomo di idrogeno ha un raggio di $1 \cdot 10^{-15}\,m$. L'elettrone normalmente è a una distanza di $5,3 \cdot 10^{-11}\,m$ dal nucleo. Supponiamo che l'atomo di idrogeno sia una sfera di raggio $5,3 \cdot 10^{-11}\,m$. Determinare il volume dell'atomo; il volume del nucleo; la percentuale del volume dell'atomo occupata dal nucleo.

**Soluzione.** L'esercizio offre una descrizione dell'atomo classica, basata sull'atomo di Rutherford, ormai alquanto lontana dalla teoria della meccanica quantistica. In ogni caso, ricordando che il volume di una sfera è dato da

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

avremo

$$V_H = \frac{4}{3}\pi \cdot \left(5,3 \cdot 10^{-11}\right)^3\,m^3 = 6,2 \cdot 10^{-31}\,m^3$$

$$V_{nucleo} = \frac{4}{3}\pi \cdot \left(1 \cdot 10^{-15}\right)^3 \, m^3 = 4,2 \cdot 10^{-45} \, m^3$$

il rapporto tra il volume del nucleo e dell'atomo in percentuale è dato da

$$R = \frac{4,2 \cdot 10^{-45} \, m^3}{6,2 \cdot 10^{-31} \, m^3} \times 100 = 6,8 \cdot 10^{-13}\%$$

**Esercizio 37.** In un esperimento di diffusione tipo Rutherford, ogni atomo di una sottile lamina di oro può essere considerato un possibile bersaglio con una certa sezione circolare. Delle particelle $\alpha$ vengono sparate contro questo bersaglio, in cui il nucleo rappresenta il centro. Il rapporto tra l'area trasversale del nucleo di oro e l'area trasversale dell'atomo è $2,6 \cdot 10^{-7}$. Il raggio dell'atomo di oro è $1,4 \cdot 10^{-11} \, m$. Trovare il raggio del nucleo di oro.

**Soluzione.** Se consideriamo queste aree come circolare, il rapporto tra due aree è espresso dal rapporto tra il quadrato dei loro raggi, per cui

$$\left(\frac{r_{nucleo}}{r_{Au}}\right)^2 = 2,6 \cdot 10^{-7}$$

cioè

$$\frac{r_{nucleo}^2}{\left(1,4 \cdot 10^{-11} \, m\right)^2} = 2,6 \cdot 10^{-7}$$

da cui

$$r_{nucleo} = 1,4 \cdot 10^{-11} \, m\sqrt{2,6 \cdot 10^{-7}} = 7,1 \cdot 10^{-15} \, m$$

**Esercizio 38.** In un esperimento di diffusione alla Rutherford un nucleo bersaglio ha un diametro di $1,4 \cdot 10^{-14} \, m$. La particella $\alpha$ incidente ha massa $6,64 \cdot 10^{-27} \, kg$. Calcolare l'energia cinetica di una particella $\alpha$ avente la lunghezza d'onda di de Broglie uguale al diametro del nucleo bersaglio.

**Soluzione.** La particella $\alpha$ avrà una quantità di moto uguale a

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \, J\,s}{1,4 \cdot 10^{-14} \, m} = 4,7 \cdot 10^{-20} \, kg \, \frac{m}{s}$$

la sua energia cinetica è quindi

$$K = \frac{p^2}{2m} = \frac{\left(4,7 \cdot 10^{-20} \, kg \, \frac{m}{s}\right)^2}{2 \times 6,64 \cdot 10^{-27} \, kg} = 1,7 \cdot 10^{-13} \, J$$

**Esercizio 39.** Il nucleo di un atomo di rame contiene 29 protoni e ha un raggio di $4,8 \cdot 10^{-15} \, m$. Calcolare il lavoro (in elettronvolt) compiuto dalla forza elettrica quando un protone è portato, partendo da fermo, dall'infinito fino alla superficie del nucleo di rame.

**Soluzione.** Il lavoro in questo caso è uguale alla variazione dell'energia potenziale; all'infinito tale valore è uguale a zero, cioè

$$W = -\Delta U = -k\frac{q_1 q_2}{r} = -8,99 \cdot 10^9 \times \frac{29 \times \left(1,60 \cdot 10^{-19}\right)^2}{4,8 \cdot 10^{-15}} = -1,4 \cdot 10^{-12} \, J = -8,7 \cdot 10^6 \, eV$$

**Esercizio 40.** Usando il modello di Bohr, si consideri l'energia dell'ennesima orbita di un atomo di berillio tre volte ionizzato ($Be^{3+}$, $Z = 4$) e l'energia di un atomo di idrogeno. Determinare il rapporto tra queste energie.

**Soluzione.** L'energia dell'ennesimo livello è data da

$$E_n = -13,6\,eV \cdot \frac{Z^2}{n^2} = -\frac{218}{n^2}\,eV$$

l'energia di un atomo di idrogeno è

$$E_H = -\frac{13,6 \times 1^2}{n^2}$$

il rapporto è quindi dato dal rapporto tra i quadrati di $Z$, cioè dal numero atomico, (numero di protoni del nucleo o la carica del nucleo)

$$R = \frac{Z_{Be}^2}{Z_H^2} = \frac{218}{13,6} = 16$$

**Esercizio 41.** Si consideri il fotone emesso quando l'elettrone di un atomo di idrogeno compie una transizione dal livello energetico con $n = 7$ producendo una riga della serie di Paschen. Calcolare l'energia (in joule) del fotone emesso.

**Soluzione.** Nella serie di Paschen, l'elettrone passa dal livello caratterizzato dal numero quantico $n = 7$ al livello $n = 3$, per cui

$$hf = -2,18 \cdot 10^{-18}\,J \left(\frac{1}{3^3} - \frac{1}{7^2}\right) = 1,98 \cdot 10^{-19}\,J$$

**Esercizio 42.** Un atomo di idrogeno si trova nello stato eccitato $n = 4$. Qual è la sua energia di ionizzazione? Determinare il rapporto tra l'energia di ionizzazione per lo stato eccitato $n = 4$ e l'energia di ionizzazione del livello fondamentale.

**Soluzione.** Nel primo caso si ha l'emissione di un elettrone dal livello $n = 4$, per cui

$$E = -13,6\left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{4^2}\right) = 0,85\,eV$$

Nel secondo caso l'elettrone emesso si trova nello stato fondamentale con $n = 1$, per cui

$$E = -13,6\left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{1^2}\right) = 13,6\,eV$$

e il rapporto è dato da

$$R = \frac{0,85\,eV}{13,6\,eV} = 0,0625$$

**Esercizio 43.** In un atomo di idrogeno, qual è l'energia totale (in eV) di un elettrone che si trova in un'orbita di raggio $4,761 \cdot 10^{-10}\,m$?

**Soluzione.** All'orbita di raggio assegnato corrisponde un livello energetico

$$n = \sqrt{\frac{Zr_n}{5,29 \cdot 10^{-11}\,m}} = \sqrt{\frac{1 \times 4,761 \cdot 10^{-10}\,m}{5,29 \cdot 10^{-11}\,m}} = 3$$

l'energia associata è allora

$$E_3 = -13,6\frac{1}{3^2} = -1,51\,eV$$

**Problema.** Mentre l'elettrone di un atomo di idrogeno si trova nel primo stato eccitato, riceve dall'esterno un'energia di $2,86\,eV$. Calcolare il numero quantico $n$ dello stato eccitato in cui l'elettrone si porta.

**Soluzione.** Il primo stato eccitato corrisponde al livello $n = 2$, per cui

$$2,86 = -13,6\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{4}\right)$$

risolvendo rispetto a $n$, si ha

$$-0,21 + 0,25 = \frac{1}{n^2}$$

da cui

$$n = \sqrt{\frac{1}{0,04}} = 5$$

**Esercizio 44.** Nell'atomo di idrogeno il raggio di un'orbita B è sedici volte quello di un'orbita A. L'energia totale dell'elettrone nell'orbita A è $-3,40\,eV$. Calcolare l'energia totale dell'elettrone nell'orbita B.

**Soluzione.** Il raggio dell'orbita è descritto dalla formula

$$r_n = 5,29 \cdot 10^{-11}\frac{n^2}{Z^2}$$

da cui, per l'idrogeno con $Z = 1$

$$n^2 = \frac{r_n}{5,29 \cdot 10^{-11}}$$

se questo valore di $n$ corrisponde all'energia nell'orbita A, allora

$$E_A = -13,6\frac{5,29 \cdot 10^{-11}}{r_A} = -3,40$$

cioè

$$r_A = \frac{-13,6 \cdot 5,29 \cdot 10^{-11}}{-3,40} = 2,116 \cdot 10^{-10}\,m$$

L'orbita B ha un raggio 16 volte maggiore, per cui

$$r_B = 16\times, 116 \cdot 10^{-10}\,m = 3,386 \cdot 10^{-9}\,m$$

Possiamo quindi calcolare il valore del numero quantico corrispondente a questo raggio

$$n_B = \sqrt{\frac{3,386 \cdot 10^{-9}\,m}{5,29 \cdot 10^{-11}\,m}} = 8$$

l'energia che corrisponde all'elettrone in questa orbita è

$$E_8 = -13,6\frac{Z^2}{n^2} = -\frac{13,6}{64} = 0,213\,eV$$

**Esercizio 45.** Un atomo di idrogeno emette un fotone a seguito di una transizione da uno stato eccitato ($n = N$) allo stato fondamentale ($n = 1$). Il fotone ha quantità di moto $5,452 \cdot 10^{-27}\,{}^{\mathrm{kg\,m}}\!/_{\mathrm{s}}$. Determinare N.

**Soluzione.** La differenza tra le energie dei due livelli è data da

$$E_1 - E_N = \frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{\frac{h}{p}} = cp = 3,0 \cdot 10^8\,m \times 5,452 \cdot 10^{-27}\,{}^{\mathrm{kg\,m}}\!/_{\mathrm{s}} = 1,636 \cdot 10^{-18}\,J = 10,21\,eV$$

ma l'energia del livello fondamentale è uguale a $13,6\ eV$, per cui

$$E_N = -13,6 + 10,21 = -3,39\,eV$$

il livello energetico si esprime come

$$-3,39 = -13,6\frac{1}{N^2}$$

e

$$N = \sqrt{\frac{13,6}{3,39}} = 2$$

**Esercizio 46.** Nello spettro di raggi X del niobio ($Z = 41$), un picco $K_\alpha$ è osservato alla lunghezza d'onda di $7,462 \cdot 10^{-11}\,m$. Determinare la differenza tra la lunghezza d'onda osservata al picco $K_\alpha$ e quella predetta dal modello di Bohr. Esprimere il valore trovato nel punto precedente come percentuale della lunghezza d'onda osservata.

**Soluzione.** Applichiamo la relazione che esprime la lunghezza d'onda in funzione dei livelli energetici coinvolti nell'emissione del fotone. Il picco $K_\alpha$ corrisponde a una transizione del livello con $n = 2$ a quello fondamentale con $n = 1$.

$$\frac{1}{\lambda} = 1,097 \cdot 10^7\,m^{-1} \times \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right) \times 40^2$$

avremo

$$\lambda = 7,596 \cdot 10^{-7}$$

la differenza in percentuale è

$$\frac{7,596 \cdot 10^{-7} - 7,462 \cdot 10^{-7}}{7,462 \cdot 10^{-7}} \times 100 = 1,796\%$$

**Esercizio 47.** Per il ${}^{208}_{82}Pb$ determinare: la carica elettrica del nucleo; il numero di neutroni; il numero di nucleoni; il raggio del nucleo; la densità nucleare.

**Soluzione.** Esercizio sugli elementi di base riguardante il nucleo di un atomo. La carica elettrica corrisponde al numero di protoni presenti nel nucleo (numero atomico, $Z$), che per l'atomo neutro equivale al numero di elettroni, pertanto

$$Z = 82 \cdot 1,60 \cdot 10^{-19}\,C = 1,31 \cdot 10^{-17}\,C$$

il numero di neutroni è uguale alla differenza $208 - 82 = 126$

il numero di nucleoni corrisponde alla somma dei protoni e neutroni presenti nel nucleo, numero di massa $A$, cioè 208

il raggio è dato da

$$r_{Pb} = 1,2 \cdot 10^{-15}\, m \times 208^{\frac{1}{3}} = 7,1 \times 10^{-15}\, m$$

la densità nucleare è data dal rapporto tra la massa e il volume (inteso in senso classico)

$$d = \frac{M}{V} = \frac{208 \times 1,67 \cdot 10^{-27}\, kg}{\frac{4}{3}\pi \left(7,1 \times 10^{-15}\, m\right)^3} = 2,3 \cdot 10^{17}\, \frac{kg}{m^3}$$

**Esercizio 48.** Una stella di neutroni è formata da neutroni e ha una densità approssimativamente uguale a quella di un nucleo. Calcolare il raggio di una stella di neutroni con una massa pari a 0,40 volte quella del Sole.

**Soluzione.** Assumiamo la massa del sole uguale a $m_{\odot} = 1,989 \cdot 10^{30}\, kg$; la stella avrà quindi una massa

$$m_* = 1,989 \cdot 10^{30}\, kg \times 0,40 = 7,956 \cdot 10^{29}\, kg$$

la densità dei nuclei è circa sempre la stessa; prendiamo quindi $d = 2,3 \cdot 10^{17}\, \frac{kg}{m^3}$; il raggio della stella sarà

$$r = \sqrt[3]{\frac{3m}{4\pi d}} = \sqrt[3]{\frac{3 \times 7,956 \cdot 10^{29}\, kg}{4\pi \times 2,3 \cdot 10^{17}\, \frac{kg}{m^3}}} = 9382\, m \simeq 9,4\, km$$

**Esercizio 49.** L' energia di legame di un nucleo è $225,8\, MeV$. Trovare il difetto di massa del nucleo in unità di massa atomica?

**Soluzione.** $\Delta m$ è il difetto di massa,

$$\Delta m = \frac{225,8\, Mev}{931,5\, \frac{MeV}{u}} = 0,2424\, u$$

**Esercizio 50.** La Terra ruota intorno al Sole. Insieme costituiscono un sistema legato dotato di un'energia di legame pari a $2,6 \cdot 10^{33}\, J$. Supponiamo che la Terra e il Sole siano completamente separati e posti a una distanza infinita e a riposo. Calcolare la differenza tra la massa del sistema separato e quella del sistema legato.

**Soluzione.** Se l'energia di legame è quella assegnata, allora

$$\Delta m = \frac{E}{c^2} = \frac{2,6 \cdot 10^{33}\, J}{9,0 \cdot 10^{18}\, \frac{m^2}{s^2}} = 2,9 \cdot 10^{14}\, kg$$

**Esercizio 51.** Determinare il difetto di massa (in unità di massa atomica) per: l'elio $^3_2He$, che ha massa atomica pari a $3,016030\, u$; l'isotopo dell'idrogeno noto come trizio $^3_1H$, che ha una massa atomica pari a $3,016050\, u$. Sulla base delle risposte alle due domande precedenti, stabilire quale nucleo richiede maggiore energia per essere suddiviso nei nucleoni costituenti.

**Soluzione.** l'atomo ${}^3_2He$ ha due protoni e un neutrone; la massa atomica totale delle singole particelle è

$$2 \times 1,007825 + 1 \times 1,008665 = 3,024320\,u$$

il difetto di massa è

$$\Delta m_{{}^3_2He} = 3,024320 - 3,016050 = 0,008265$$

nel caso del del ${}^3_1H$, il nucleo ha un protone e due neutroni

$$1 \times 1,007825 + 2 \times 1,008665 = 3,025160\,u$$

il difetto di massa è

$$\Delta m_{{}^3_1H} = 3,025160 - 3,016050 = 0,009105\,u$$

il nucleo che richiede la maggiore energia per essere suddiviso è il trizio, che ha il difetto di massa maggiore e, quindi, per la relazione $\Delta E = \Delta mc^2$, l'energia di legame maggiore.

**Esercizio 52.** Due isotopi di un certo elemento hanno energie di legame che differiscono per $5,03\,MeV$. L'isotopo con l'energia di legame maggiore contiene un neutrone in più rispetto all'altro. Determina la differenza di massa atomica tra i due isotopi.

**Soluzione.** Conoscendo la differenza nelle energie di legame e l'eccesso in neutroni di un isotopo, è possibile determinare la differenza di massa atomica tra i due isotopi. Il difetto di massa corrispondente a una differenza di energia di legame di $5,03\,MeV$ è

$$5,03\,MeV \times \frac{1\,u}{931,5\,MeV} = 0,00540\,u$$

L'isotopo con energia di legame maggiore ha un neutrone, $(m_n = 1,008665\,u)$in più dell'altro isotopo, per cui

$$1,008665\,u - 0,00540\,u = 1,00327\,u$$

**Esercizio 53.** L'energia di legame di un neutrone nel nucleo di azoto ${}^{14}_7N$ è l'energia che bisogna fornire per avere la trasformazione seguente:

$${}^{14}_7N + energia \rightarrow {}^{13}_7N + {}^1_0n$$

Determinare (in MeV) l'energia che lega il neutrone al nucleo di azoto ${}^{14}_7N$ a partire dalla massa dell'azoto ${}^{13}_7N$ $(13,005738\,u)$, del neutrone $(1,008665\,u)$ e dell'azoto ${}^{14}_7N$ $(14,003074\,u)$.

**Soluzione.** L'energia espressa in MeV è

$$(13,005738 + 1,008665 - 14,003074)\ u \times 931,5\,MeV = 10,553\,MeV$$

**Esercizio 54.** Un decadimento $\alpha$ converte il radio ${}^{226}_{88}Ra$ (massa atomica $= 226,02540\,u$) in radon ${}^{222}_{86}Rn$ (massa atomica $= 222,01757\,u$). La massa atomica di una particella $\alpha$ è $4,002603\,u$. Determinare l'energia prodotta (in MeV).

**Soluzione.** La particella $\alpha$ è composta da due protoni e due neutroni, per cui il nucleo di radon perde quattro masse e due cariche positive. Nel decadimento si applica il principio di conservazione dell'energia. La differenza tra le due masse atomiche del radio e del radon

$$226,02540\,u - 222,01757\,u = 4,00783\,u$$

il difetto di massa è quindi

$$4,00783\,u - 4,002603\,u = 0,005227\,u$$

l'energia prodotta è quindi

$$0,005227\,u \times 931,5\,\frac{MeV}{u} = 4,87\,MeV$$

**Esercizio 55.** Quando decade, l'uranio $^{235}_{92}U$ emette anche un fotone $\gamma$ di lunghezza d'onda $1,14 \cdot 10^{-11}\,m$. Determinare l'energia (in MeV) del fotone.

**Soluzione.** Dalla relazione

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34}\,Js \times 3,0 \cdot 10^{8}\,\frac{m}{s}}{1,14 \cdot 10^{-11}\,m} = 1,74 \cdot 10^{-14}\,J$$

trasformando in MeV

$$E = \frac{1,74 \cdot 10^{-14}\,J}{1,60 \cdot 10^{-19}\,\frac{J}{MeV}} = 0,109\,MeV$$

**Esercizio 56.** Un nucleo di polonio $^{210}_{84}Po$ (avente massa atomica $209,982848\,u$) subisce un decadimento $\alpha$. Supponiamo che tutta l'energia prodotta sia energia cinetica della particella $\alpha$ (massa atomica $= 4,002603\,u$) e trascuriamo il rinculo del nucleo figlio (piombo $^{206}_{82}Pb$, massa atomica $= 205,974440\,u$). Determinare la velocità della particella $\alpha$.

**Soluzione.** La differenza tra le masse dei due nuclei è

$$209,982848\,u - 205,974440\,u = 4,008410\,u$$

il difetto di massa sarà

$$4,008410\,u - 4,002603\,u = 0,005805\,u$$

che equivale a

$$0,005805\,u \times 931,5\,\frac{MeV}{u} = 5,407\,MeV$$

e trasformando in Joule

$$K = 5,407 \cdot 10^{6}\,eV \times 1,602 \cdot 10^{-19}\,\frac{J}{eV} = 8,66 \cdot 10^{-13}\,J$$

Ora l'energia cinetica della particella alfa è data da

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

per cui

$$v = \sqrt{\frac{2K}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 8,66 \cdot 10^{-13}\,J}{4,002603\,u \times 1,667 \cdot 10^{-27}\,\frac{kg}{u}}} = 1,61 \cdot 10^{7}\,\frac{m}{s} \quad (= 0,054c)$$

cioè poco meno del 5% della velocità della luce.

**Esercizio 57.** L' isotopo del radio ${}^{224}_{88}Ra$ ha una costante di decadimento di $2,19 \cdot 10^{-6}\,s^{-1}$ . Calcola il tempo di dimezzamento (in giorni) dell'isotopo.

**Soluzione.** La relazione che esprime il tempo di dimezzamento in funzione della costante di decadimento $\lambda$ è

$$\lambda = \frac{0,693}{T_{1/2}}$$

dove $\ln 2 = 0,693$; si avrà quindi

$$T_{1/2} = \frac{0,693}{\lambda} = \frac{0,693}{2,19 \cdot 10^{-6}\,s^{-1}} = 316506\,s = \frac{316506\,s}{24 \times 3600} = 3,66\,giorni$$

**Esercizio 58.** Due prodotti di scarto radioattivo provenienti da reattori nucleari sono lo stronzio ${}^{90}_{38}Sr$ ($T_{1/2} = 29,1\,anni$) e il cesio ${}^{134}_{55}Cs$ ($T_{1/2} = 2,06\,anni$). Queste due specie chimiche sono presenti inizialmente secondo il rapporto $N_{0,Sr}/N_{0,Cs} = 7,80 \cdot 10^{-3}$. Trovare il rapporto $N_{Sr}/N_{Cs}$ dopo dodici anni.

**Soluzione.** La legge di decadimento dei nuclei radioattivi è sempre $N = N_0 e^{-\lambda t}$, dove $\lambda$ è la costante di decadimento che vale $\lambda = \frac{0,693}{T_{1/2}}$. Avremo per

$$N_{Sr}\,(t = 12\,anni) = N_{0,Sr} e^{-\frac{0,693}{29,1} \times 12} = N_{0,Sr} 0,751$$

$$N_{Cs}\,(t = 12\,anni) = N_{0,Cs} e^{-\frac{0,693}{2,06} \times 12} = N_{0,Cs} 0,0177$$

il rapporto cercato è

$$\frac{N_{Sr}}{N_{Cs}} = \frac{N_{0,Sr}}{N_{0,Cs}} \times \frac{0,751}{0,0177} = 7,80 \cdot 10^{-3} \times \frac{0,751}{0,0177} = 0,331$$

**Esercizio 59.** Un dispositivo utilizzato nella terapia radiologica del cancro contiene$0,50\,g$ di cobalto ${}^{60}_{27}Co$ ($m = 59,933819\,u$). L'emivita di questo isotopo vale $5,27$ anni. Determinare l'attività del materiale radioattivo.

**Soluzione.** Una mole dell'isotopo equivale a $59,933819\,g$, per cui la quantità presente vale

$$n = \frac{0,50\,g}{59,933819\,g} = 8,34 \cdot 10^{-3}\,moli$$

ogni mole contiene un numero di Avogadro di isotopi, cioè

$$N_0 = 8,34 \cdot 10^{-3}\,moli \times 6,02 \cdot 10^{23}\,\frac{isotopi}{moli} = 5,02 \cdot 10^{21}\,isotopi$$

la costante di decadimento è

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{0,693}{5,27 \times (24 \times 3600 \times 365)\,s} = 4,17 \cdot 10^{-9}\,s^{-1}$$

L'attività di una sostanza radioattiva è data da:

$$\frac{|\Delta N|}{\Delta t} = -\lambda N_0 = 4,17 \cdot 10^{-9}\,s^{-1} \times 5,02 \cdot 10^{21}\,isotopi = 2,09 \cdot 10^{13}\,Bq$$

**Esercizio 60.** Il numero di nuclei radioattivi presenti all'inizio di un esperimento è $4,60 \cdot 10^{15}$. Il numero presente venti giorni dopo è $8,14 \cdot 10^{14}$. Calcola (in giorni) il tempo di dimezzamento dei nuclei.

**Soluzione.** I dati forniti indicano che $N_0 = 4,60 \cdot 10^{15}$ e $N\left(t = 20\,giorni\right) = 8,14 \cdot 10^{14}$; la legge di decadimento si esprime come

$$N = N_0 e^{-\lambda t} = N_0 e^{-\frac{0,693}{T_{1/2}}t}$$

per cui, svolgendo anche i calcoli

$$\frac{N}{N_0} = e^{-\frac{0,693\times 20}{T_{1/2}}}$$

$$\ln\frac{N}{N_0} = -\frac{13,86}{T_{1/2}}$$

e infine

$$T_{1/2} = -13,86 \times \frac{1}{\ln\frac{N}{N_0}} = -13,86 \times \frac{1}{\ln\frac{8,14\cdot 10^{14}}{4,60\cdot 10^{15}}} = \frac{-13,86}{-1,732} = 8\,giorni$$

[Per il calcolo, è meglio evitare eccessive approssimazioni, ed eseguire con la calcolatrice tutte le operazioni finali in una volta sola]

**Esercizio 61.** Fuori dal nucleo, il neutrone è radioattivo e decade in un protone, un elettrone e un antineutrino. Il tempo di dimezzamento di un neutrone $\left(massa = 1,675 \cdot 10^{-27}\,kg\right)$ fuori dal nucleo è $10,4\,min$. In media, quanta distanza (in metri) percorrerebbe un fascio di neutroni da $5,00\,eV$ prima che il numero di neutroni scenda al di sotto del 75% del suo valore iniziale?

**Soluzione.** Il decadimento segue la legge anche per il fascio di neutroni. In questo caso $N = 0,75N_0$, per cui

$$0,75\cancel{N_0} = \cancel{N_0}e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}}t} = e^{-\frac{0,693t}{10,4\,min}}$$

$$t = \frac{\ln 0,75 \times 10,4\,min}{0,693} = 4,32\,min = 259\,s$$

se tutti i neutroni possiedono la stessa energia

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = 5,00\,eV \times 1,602 \cdot 10^{-19}\,\frac{J}{eV} = 8,01 \cdot 10^{-19}\,J$$

da cui

$$v = \sqrt{\frac{2 \times 8,01 \cdot 10^{-19}\,J}{1,675 \cdot 10^{-27}\,kg}} = 3,09 \cdot 10^4\,\frac{m}{s}$$

se la velocità si mantiene costante (moto rettilineo uniforme), allora

$$s = vt = 8,01 \cdot 10^6\,m$$